143. Wiener's Fundamental Formula ニ就イテ

若松大助（阪大）

Wiener ハ $g(t)$ ノ "mittelwert" ノ存在ヲ假定シ即チ

$$(1) \quad \mathfrak{M}\{g\} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X g(t)\,dt \ (\text{有限})$$ ノ存在スルトノ

假定ヨリシテ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g\left(\frac{X}{n}\right)K(X)\,dX = g(+0)\int_0^\infty K(X)\,dX$$

ヨリ Wiener's Formula ト云フ次ノ等式

$$(2) \quad \lim_{n\to 0}\int_0^\infty g\left(\frac{X}{n}\right)K(X)\,dX = \mathfrak{M}(g)\int_0^\infty K(X)\,dX$$

ヲ導イタ（S. Bochner Vorlesungen über Fourier-sche Integral §9. 30P.）

若シ (1) ニ於テ

$$\begin{cases} X = e^{\xi}, \; t = e^{\eta}, \\ g(e^{\eta}) = f(\eta) \end{cases} \qquad K_1(\xi) = \begin{cases} e^{-\xi} & \xi > 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

ナル *substitution* ヲ行ヘバ

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X g(t)\,dt = \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{e^{\xi}} e^{\eta-\xi} g(e^{\eta})\,d\eta$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta) f(\eta)\,d\eta$$

$$= \mathfrak{M}\{f\}$$

即チ (1) ハ上ノ如ク書ケル。

$$(3) \qquad \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi-\eta) f(\eta)\,d\eta = \mathfrak{M}\{f\}\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi)\,d\xi$$

(2) ノ式ニテ $\dfrac{X}{n} = t$ トオケバ

$$(4) \qquad \lim_{n\to 0} n\int_0^{\infty} g(t) K(nt)\,dt = \mathfrak{M}\{g\}\int_0^{\infty} K(X)\,dX$$

前同様ニ $t = e^{\eta}$, $n = e^{-\xi}$ トオケバ

$$\lim_{n\to 0} n\int_0^{\infty} g(t) K(nt)\,dt = \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(e^{\eta}) K(e^{-\xi+\eta}) e^{-\xi+\eta} d$$

$$= \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi-\eta) f(\eta)\,d\eta$$

ココデ $g(e^{\eta}) = f(\eta)$, $K(e^{-\xi})e^{-\xi} = K_2(\xi)$ ト置ク.

(4) ノ *left-hand side* ニ於テハ $X = e^{-\xi}$ トオキ,

$K(e^{-\xi})e^{-\xi} = K_2(\xi)$ ト書ク.

然ラバ (2) ハ次ノ如ク書ケル。

$$(5)\quad \lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_2(\xi-\eta)f(\eta)d\eta=\mathfrak{M}\{f\}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_2(\xi)d\xi$$

(3) カラ (5) ニ移ルノガ *Wiener* ノ *Tauberian Theorem* デアル。

故ニ $\mathrm{K}_1(\xi)\subset\mathrm{L}_1$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_1(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\neq 0\qquad -\infty<\alpha<\infty$$

且ツ $f(\xi)$ ガ $(-\infty,\infty)$ デ *bounded* デ

$$(3)\quad \mathfrak{M}\{f\}=\frac{\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_1(\xi-\eta)f(\eta)d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_1(\xi)d\xi}$$

ガ存在シテ然モ *finite* デアルトキ, $\mathrm{K}_2(\xi)\subset\mathrm{L}_1$ デアレバ

$$(5)\quad \mathfrak{M}\{f\}=\frac{\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_2(\xi-\eta)f(\eta)d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_2(\xi)d\xi}$$

トナルガ (5) ヲ *Wiener's Fundamental Formula* ト云フノガ妥當デハナイデセウカ。*Bochner* ノ稱スルモノハ $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}_1(\xi)d\xi=1$ ノ *special case* デアル。

今年ノ當大學デノ數學物理學會年會ノ折ノ高橋龍夫氏ノ *Wiener's Formula* ニツイテノ論文モ、亦 (*Proc. Imperial Academy*. X (1934) 393—396) ノ泉信一氏ノ *Wiener's Formula* ニツイテノ論文モ *Wiener's*

Fundamental Formula ノ special case ニ
過ギズ、西氏ノ論文ハ Wiener ノ Fourier transform
ノ理論ヲ使ハズニ出來ル特殊ナ場合ダト思ヒマス。